שאלה 1: (25%)

יהי $V = \mathbb{R}_3[x]$ מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה לכל היותר 3 (כמרחב וקטורי ממשי),
ויהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי המוגדר על ידי:

$$T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = ax^3 + bx^2 + cx - c.$$

א. (8%) חשב את המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס הסדור

$$B = \{\ b_1 = x^3 - x + 1,\ b_2 = x^2 + x - 1,\ b_3 = x - 1,\ b_4 = 1\ \}.$$

ב. (6%) **מצא** בסיס ומימד של $\mathrm{Im}(T)$.

ג. (3%) **הוכח או הפרך:** T הוא אופרטור הפיך.

ד. (4%) **מצא** תת־מרחב U של V כך שמקיים $V = U \oplus \mathrm{Im}(T)$.

ה. (4%) **הוכח או הפרך:** $5T^3 - 8T^2 + 3T = 0$.
רמז: העזר בסעיף א'.

פתרון:

א. נחשב קודם את תמונות אברי B ויצוגם לפי הבסיס B.

$$\begin{array}{lllllllllllll}
T(b_1) & = & T(x^3-x+1) & = & x^3-x+1 & = & (1)b_1 & + & (0)b_2 & + & (0)b_3 & + & (0)b_4 \\
T(b_2) & = & T(x^2+x-1) & = & x^2+x-1 & = & (0)b_1 & + & (1)b_2 & + & (0)b_3 & + & (0)b_4 \\
T(b_3) & = & T(x-1) & = & x-1 & = & (0)b_1 & + & (0)b_2 & + & (1)b_3 & + & (0)b_4 \\
T(b_4) & = & T(1) & = & 0 & = & (0)b_1 & + & (0)b_2 & + & (0)b_3 & + & (0)b_4
\end{array}$$

נציב את וקטורי הקואורדינטות $[T(b_j)]_B$ בעמודת המטריצה $[T]_B$:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [T(b_1)]_B & [T(b_2)]_B & [T(b_3)]_B & [T(b_4)]_B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ב. ניתן למצוא בסיס לתמונה במספר דרכים:

- התמונות של קבוצה פורשת של התחום פורשים את $\mathrm{Im}(T)$.

בסעיף א' ראינו את התמונות של אברי הבסיס B: $\{b_1, b_2, b_3, 0\}$, אך כמובן שוקטור האפס מיותר. לכן $S_1 = \{b_1, b_2, b_3\}$ הוא קבוצה פורשת של התמונה. כתת־קבוצה של הבסיס B של V זו קבוצה בת"ל. אי לכך, זה בסיס של התמונה.

- ניתן לחשב את תמונת אברי הבסיס הסטנדרטי של V:

$$S_2 = \left\{\ T(1) = 0,\ T(x) = x - 1,\ T(x^2) = x^2,\ T(x^3) = x^3\ \right\}$$

ושוב להוריד את 0 על מנת לקבל קבוצה בת"ל (יש לבדוק או לנמק שאלו פולינומים ממעלות שונות ולכן בת"ל) ופורשת, דהיינו בסיס, של $\mathrm{Im}(T)$. נקבל $S_2 = \left\{\ x - 1,\ x^2,\ x^3\ \right\}$.

- נעזר באיבר הכללי של התמונה:

$$T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = ax^3 + bx^2 + cx - c = ax^3 + bx^2 + c(x - 1)$$

על מנת להסיק ש־ $S_2 = \left\{\ x - 1,\ x^2,\ x^3\ \right\}$ היא קבוצה פורשת של $\mathrm{Im}(T)$. לאחר בדיקה שהקבוצה S_2 בת"ל, מקבלים שהיא בסיס לתמונה.

- כמו כן, ניתן לקבל קבוצה פורשת של התמונה על ידי בחירת פולינומים המתאימים (קורדינטות לפי בסיס F) לשורות של כל מטריצה השקולת שורה ל־ $([T]_F)^t$. (השימוש במטריצה המשוחלפת ושורות כאן היא על מנת לבצע פעולות שורה.)

לאחר קבלת בסיס, נסיק ש־ $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$.

<u>הערה</u>: ניתן להסיק שהמימד הוא 3 באופן נוסף.

$$.\ \dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rank}(T) = \mathrm{rank}([T]_B) = 3$$

כאשר המימד של התמונה ידוע מראש, אפשר להסיק שקבוצה פורשת בגודל המימד היא בהכרח בת"ל (כתחליף לבדיקה ישירה שהקבוצה בת"ל).

ג. האופרטור הנתון T אינו הפיך. להלן מספר נימוקים שונים.

- מימד הגרעין הוא $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Im}(T)) = 4 - 3 = 1$ שונה מאפס, ולכן $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$ ולכן האופרטור T אינו חח"ע, ולכן אינו הפיך.
- בסעיף א' ראינו ש־ $T(1) = 0$, כלומר $1 \in \mathrm{Ker}(T)$. אי לכך, האופרטור T אינו חח"ע ולכן אינו הפיך.
- מימד התמונה קטנה ממש ממימד V: $3 = \dim(\mathrm{Im}(T)) < \dim(V) = 4$ ולכן האופרטור T אינו על, ולכן אינו הפיך.
- $\mathrm{rank}([T]_B) = 3$, ולכן המטריצה $[T]_B$ איננה הפיכה. כידוע, אופרטור T הפיך אם"ם לכל בסיס F המטריצה המייצגת $[T]_F$ הפיכה. לכן, האופרטור הנתון T אינו הפיך.
- $\det([T]_B) = 0$ (יש שורת אפסים במטריצה) ולכן המטריצה המייצגת אינה הפיכה, ולכן האופרטור הנתון T אינו הפיך.

ד. נתאר גישה "קונסטרוקטיבית" למצוא תת־מרחב מתאים. U צריך לקיים:

א. $U + \mathrm{Im}(T) = V$ (הסכום הוא V),

ב. $U \cap \mathrm{Im}(T) = \{0\}$ (כך שהסכום יהיה סכום ישר), כלומר ממימד 0.

נעזר במשפט המימדים:

$$\begin{aligned} 4 = \dim(V) = \dim(U + \mathrm{Im}(T)) &= \dim(U) + \dim(\mathrm{Im}(T)) - \dim(U \cap \mathrm{Im}(T)) \\ &= \dim(U) + 3 - 0 \end{aligned}$$

ונסיק ש־ $\dim(U) = 1$.
כל מרחב מהצורה $U = \mathrm{Span}(\{\, p(x) \,\})$, כאשר $p(x) \notin \mathrm{Im}(T)$ מתאים לדרישות, ורק מרחבים כאלו מתאימים. ניתן לבחור את $p(x) = d + cx + bx^2 + ax^3$ לכל בחירה של a, b, c, d עבורם המטריצה הבאה תהיה מדרגה מלאה (4):

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$$

(בשלוש שורות הראשונות שמנו וקטורי קואורדינטות של הבסיס S_2 של $\mathrm{Im}(T)$ לפי הבסיס הסטנדרטי $E = \{\, 1, x, x^2, x^3 \}$ של V.)
על מנת שהדרגה תהיה מלאה, מספיק לדרוש $d \neq -c$.
למשל, אפשר לקחת את $U = \mathrm{Span}(\{1\})$ או $U = \mathrm{Span}(\{x\})$.
<u>הערה</u>: בפתרון מספיק לספק מרחב מתאים U ולבדוק שמתקיימות הדרישות (כך שיתקיים $U \oplus \mathrm{Im}(T) = V$).

ה. הטענה נכונה. יש מספר דרכי הוכחה שונות.
נסמן $H = 5T^3 - 8T^2 + 3T$.
<u>הוכחה 1</u>: נעזר במשפטים:

- $[S \circ T]_F = [S]_F \cdot [T]_F$,
- $[aS + bT]_F = a[S]_F + b[T]_F$,
- $[T^n]_B = ([T]_B)^n$ לכל מספר טבעי n.

מתכונות אלו נקבל: לאופרטור הנתון T ולבסיס הנתון B מתקיים

$$([T]_B)^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [T]_B.$$

מכאן נחשב

$$[H]_B = [5T^3 - 8T^2 + 3T]_B = 5[T]_B^3 - 8[T]_B^2 + 3[T]_B = (5-8+3)[T]_B = 0 \cdot [T]_B = 0.$$

מטריצת האפס מייצגת תמיד את אופרטור האפס, ולכן $H = 0$ כנדרש.
<u>הוכחה 2</u>: נחשב את T^2:

$$\begin{aligned} T^2(ax^3 + bx^2 + cx + d)) &= T(T(ax^3 + bx^2 + cx + d)) \\ &= T(ax^3 + bx^2 + cx - c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - c \\ &= T(ax^3 + bx^2 + cx + d) \end{aligned}$$

ולכן $T^2 = T$. אזי גם $T^3 = T$, ולכן

$$H = 5T^3 - 8T^2 + 3T = 5T - 8T + 3T = (5 - 8 + 3)T = 0 \cdot T = 0.$$

<u>הוכחה 3</u>: ל־ T יש שלוש ו"ע בת"ל השייכים לע"ע 1 (למשל b_1, b_2, b_3 וכן ו"ע (למשל b_4) השייך לע"ע 0. נציב את האופרטור T בפולינום $f(x) = 5x^3 - 8x^2 + 3x$. לאופרטור $H = f(T)$ יש

ע"ע $f(0) = 0, f(1) = 0$ עם אותם ו"ע. לכן, 0 הוא ע"ע של H בעל ר"ג 4 (מימד המרחב כולו).
לכן, בהכרח מתקיים $H = 0$.

<u>הערה</u>: משפט קיילי־המילטון אינו שמיש במקרה שלנו. $\Delta_T(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^3$. ולכן ממשפט קיילי־המילטון נובע שלכל מטריצה מייצגת A של T מתקיים:

$$0 = \Delta_T(A) = A(A - I)^3 = A^4 - 3A^3 + 3A^2 - A.$$

מכאן נקבל $T^4 - 3T^3 + 3T^2 - T = 0$.
אין להסיק ש־ $A = I$ או $A = 0$.

<u>שאלה 2:</u> (25%)

יהי $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ מרחב המטריצות הממשיות מסדר 2×2 (כמרחב וקטורי ממשי),
ויהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי המוגדר על ידי:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b+3c & 3b+3d \\ a+2b+3c & 3b+3d \end{pmatrix}.$$

א. (4%) חשב את המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס הסטנדרטי E ואת הפולינום האופייני.
תזכורת:

$$E = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

ב. (12%) מצא את כל הערכים העצמיים של T.
לכל ערך עצמי חשב את הריבוי האלגברי, הריבוי הגיאומטרי, ובסיס למרחב העצמי.
רשום את התשובה הסופית לסעיף זה בטבלה למטה. את הנימוק יש לתת בדפים הבאים.

ג. (5%) האם קיים בסיס סדור B של V כך שהמטריצה המייצגת של T לפי הבסיס B, המסומנת $[T]_B$, היא מטריצה <u>אלכסונית</u>?
אם כן, מצא בסיס B כנ"ל ואת המטריצה האלכסונית $[T]_B$ המתאימה לבסיס שנתת.
אם לא נמק מדוע לא קיים בסיס כזה.

ד. (4%) יהי S האופרטור לינארי המוגדר על ידי $S = T^2 - 10T$. מצא את הערכים העצמיים של S ואת ריבוים הגיאומטריים.

<u>פתרון:</u>

א. על מנת לחשב את $[T]_E$ נבצע את החישובים הבאים:

$$T(e_1) = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1)e_1 + (0)e_2 + (1)e_3 + (0)e_4$$

$$T(e_2) = T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = (2)e_1 + (3)e_2 + (2)e_3 + (3)e_4$$

$$T(e_3) = T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = (3)e_1 + (0)e_2 + (3)e_3 + (0)e_4$$

$$T(e_4) = T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = (0)e_1 + (3)e_2 + (0)e_3 + (3)e_4$$

ולכן $[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

חישוב של הפולינום האופייני נותן:

$$\begin{aligned} \Delta_T(\lambda) = \det(\lambda I - [T]_E) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} \\ &\vdots \\ &= \lambda^2(\lambda-6)(\lambda-4) \end{aligned}$$

אפשר גם למצוא את הערכים העצמיים משיקולים אחרים ואז לקבל את הפולינום האופייני.

ב. נמצא חלק מוקטורים עצמיים על ידי שיקולים נוחים.

- סכום כל שורה של $[T]_E$ שווה ל־ 6, ולכן $\lambda = 6$ הוא ע"ע של T, וו"ע מתאים הוא $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

  $\lambda = 6$ הוא ע"ע בעל ר"א ור"ג לפחות 1.

- שורות $3, 4$ של $[T]_E$ שוות לשורות $1, 2$ בהתאמה.

  לכן, קל לראות ש־ $\operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}([T]_E) = 2$.

  מכאן שהר"ג של $\lambda = 0$ כע"ע של T הוא בדיוק $n - \operatorname{rank}(T) = 4 - 2 = 2$. לכן הר"א של $\lambda = 0$ הוא לפחות 2.

  קל למצוא בסיס לו"ע של ע"ע 0, כלומר בסיס לגרעין של T. בסיס אחד (מתוך אינסוף בסיסים) הוא:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- $\operatorname{tr}([T]_E) = 1 + 3 + 3 + 3 = 10$ שווה לסכום הע"ע (חזרות לפי הר"א),
  ולכן $10 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 6 + 0 + 0 + \lambda_4$. מכאן ש־ $\lambda_4 = 4$.

- $\dim(V) = 4$ ולכן יש לכל כל היותר 4 ע"ע. מצאנו 4 ע"ע (כולל ריבויים) ולכן אין עוד. מכאן ברור שהר"א של 0 הוא 2, הר"א של 6 הוא 1, והר"א של 4 הוא 1.

זה מחייב, לפי המשפט ש־ ר"א $\leq$ ר"ג ≤ 1, שהר"ג של 6 הוא 1, ושהר"ג של 4 הוא 1.

- לפי השיטה הרגילה נמצא שו"ע שמתאים לע"ע 4 הוא $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

כמובן, שאחרי מציאת הע"ע והר"א שלהם, קל להסיק שהפ"א הוא

$$\Delta_T(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 6)(\lambda - 4)$$

<u>טבלת ריכוז תשובות לסעיף ב':</u>

ערך עצמי	ריבוי אלגברי	ריבוי גיאומטרי	בסיס למרחב העצמי
6	1	1	$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
4	1	1	$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
0	2	2	$\left\{ \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

ג. מכיון שכל הע"ע קיימים בשדה (ב־ $\mathbb{R}$) ולכל ע"ע הר"ג שווה לר"ג האופרטור T לכסין.
בסיס מתאים חייב להיות מורכב מ־ 4 ו"ע בת"ל של T. בסיס אחד (מתוך אינסוף בסיסים) הוא

$$B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ b_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ b_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

עבור בסיס זה $[T]_B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, כאשר אברי האלכסון הם הע"ע של T בסדר תואם לאברי הבסיס B של ו"ע שבחרנו.

ד. נעזר במשפט שאם v הוא ו"ע בעל ע"ע λ של מטריצה A, אז v הוא ו"ע בעל ע"ע λ^n של מטריצה A^n לכל מספר טבעי n.

תוצאה דומה נכונה לאופרטור לינארי T: אם v הוא ו"ע בעל ע"ע λ של אופרטור לינארי T, אז v הוא ו"ע בעל ע"ע λ^n של T^n לכל מספר טבעי n.

מכאן שהע"ע של $S = T^2 - 10T$ הם:

$$6^2 - 10 \cdot 6 = -24, \quad 4^2 - 10 \cdot 4 = -24, \quad 0^2 - 10 \cdot 0 = 0$$

וכן שהר"ג של שני הע"ע של S הם 2:

- b_1, b_2 בבסיס שלעיל שייכים לע"ע -24,
- b_3, b_4 בבסיס שלעיל שייכים לע"ע 0.

שאלה 3: (10%)

יהיו $V = \mathbb{R}_2[x]$, מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה קטנה או שווה ל־ 2 (מעל $\mathbb{R}$),
ו־ $W = \text{Span}\left(\{p_1 = x^2 - 2x - 1, p_2 = -2x - 1\}\right)$.
נגדיר מכפלה פנימית על V על ידי:

$$\left\langle p(x), q(x)\right\rangle = p(-1)\cdot q(-1) + p(0)\cdot q(0) + p(1)\cdot q(1).$$

א. (2%) חשב את $\|p_1\|$.

ב. (2%) חשב את $\left\langle p_1, p_2\right\rangle$.

ג. (6%) מצא בסיס **אורתונורמלי** של W על ידי ביצוע תהליך גרם־שמידט על הבסיס $\{p_1, p_2\}$ (בסדר זה).

פתרון:

א. $\|p_1\| = \sqrt{9} = 3$ כי:

$$\|p_1\|^2 = \left\langle p_1, p_1\right\rangle = (p_1(-1))^2 + (p_1(0))^2 + (p_1(1))^2 = 2^2 + (-1)^2 + (-2)^2 = 9$$

ב. לפי המ"פ הנתונה:

$$\begin{aligned}\left\langle p_1, p_2\right\rangle &= p_1(-1)\cdot p_2(-1) + p_1(0)\cdot p_2(0) + p_1(1)\cdot p_2(1)\\ &= (2)(1) + (-1)(-1) + (-2)(-3) = 9\end{aligned}$$

ג. נבצע את תהליך גרם־שמידט:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{p_1}{\|p_1\|} = \frac{x^2 - 2x - 1}{3}\\
w_2 &= p_2 - \left\langle p_2, u_1\right\rangle u_1 = p_2 - \left\langle p_2, \frac{p_1}{3}\right\rangle \frac{p_1}{3} = p_2 - \overline{\left(\frac{1}{3}\right)}\,\overline{\left\langle p_1, p_2\right\rangle}\,\frac{p_1}{3}\\
&= p_2 - \frac{1}{9}\left\langle p_1, p_2\right\rangle p_1 = p_2 - \frac{9}{9}\,p_1\\
&= p_2 - p_1 = (-2x - 1) - (x^2 - 2x - 1) = -x^2\\
\|w_2\| &= \sqrt{(w_2(-1))^2 + (w_2(0))^2 + (w_2(1))^2} = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}\\
u_2 &= \frac{w_2}{\|w_1\|} = \frac{-x^2}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

ולכן הבסיס האורתונורמלי המבוקש הוא:

$$B = \left\{\ u_1 = \frac{x^2 - 2x - 1}{3},\ \ u_2 = \frac{-x^2}{\sqrt{2}}\ \right\}$$

<u>שאלה 4:</u> (15%)

יהיו A, B מטריצות ריבועיות מסדר $n \times n$ מעל שדה F, עבור $n \geq 3$ ואי זוגי.

א. (10%) הוכח שאם $AB + BA = 0$ אז לפחות אחת מהמטריצות A, B איננה הפיכה.

ב. (5%) האם ההפך נכון? כלומר, בהינתן שלפחות אחת מ־ A, B אינה הפיכה האם בהכרח מתקיים $AB + BA = 0$?
אם כן, הוכח את הטענה.אם לא, הבא דוגמה נגדית מפורשת (עבור ערך מסוים של n).

<u>פתרון:</u>

א. מכיון ש־ A, B מטריצות ריבועיות מאותו סדר, גם AB ו־ BA ריבועיות (גם מאותו סדר).
אי לכך, נוכל להעזר בדטרמיננטים.
לפי הנתון מתקיים $AB = -BA$, ולכן $\det(AB) = \det(-BA) = (-1)^n \det(BA)$.
מצד שני, לפי משפט המכפלה של דטרמיננטים (שניתן להשתמש בו כי המטריצות ריבועיות):
$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$.
אי לכך $\det(BA) = \det(AB) = (-1)^n \det(BA)$.
עבור n אי־זוגי, כפי שנתון, $\det(BA) = -\det(BA)$
ולכן בהכרח $0 = \det(BA) = \det(B)\det(A)$. ($\star$ ראו את ההערה למטה.)
מכיון שמדובר במטריצות מעל שדה, לפחות אחד הדטרמיננטים היא 0
והמטריצה המתאימה איננה הפיכה.

$\star$ <u>הערה:</u> בכל שדה שבה $1 + 1 \neq 0$ (או באופן שקול שבה $-1 \neq 1$) ההוכחה שנתנו תקיפה, והטענה נכונה. בשדה סופי "בינארי" (בעל 2^n אברים) מתקיים $1 + 1 = 0$, והטענה איננה נכונה. בשדות אלו, $A = B = I$ מהווה דוגמה נגדית, מכיון ש־ I הפיכה אך $AB + BA = I + I = 2I = 0$. שדות אלו, ושדות סופיים בכלל, לא טופלו בקורס מלבד אולי הערה על קיומן והצורך לנסח בצורה שונה או אפילו לשנות תוצאות במקרים בהם השדה סופי.

ב. הטענה איננה נכונה. ניתן דוגמה נגדית (אחת מבין אינסוף אפשרויות). נקח:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בדוגמה זו A ו־ B שתיהן אינן הפיכות, ומתקיים $AB = 0, BA = A \neq 0$
ולכן $AB + BA = 0 + A = A \neq 0$.

שאלה 5: (5%)

יהיו $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ מרחב המטריצות הממשיות מסדר 2×2 (כמרחב וקטורי ממשי),
ויהיו U, W תת־מרחבים של V כך ש־ $\dim U < \dim W$ ו־ $U \cap W \neq U$.

בדיוק שתי טענות מהטענות הבאות נכונות:

פתרון:

1. טענה **נכונה**: אם $\dim W = 2$ אז $\dim U = 1$.

הוכחה: מכיון שנתון ש־ $\dim U < \dim W = 2$, ייתכן רק $\dim U = 0$ או $\dim U = 1$.
אם נניח כי $\dim U = 0$ אז $U = \{0\}$ ובמקרה זה $U \cap W = \{0\} = U$ בסתירה לנתון.
לכן בהכרח $\dim U = 1$.

2. טענה **נכונה**: אם $\dim U = 1$ אז הסכום $U + W$ הוא סכום ישר.

הוכחה: מכיון שנתון ש־ $U \cap W \neq U$, החיתוך $U \cap W$ הוא תת־מרחב של U ממימד קטן מ־ $\dim(U) = 1$. ולכן, $U \cap W = \{0\}$, וזה מחייב שהסכום $U + W$ הוא סכום ישר.

3. טענה **לא נכונה**: אם $\dim W = 3$ אז $U \oplus W = V$.

דוגמה נגדית:

$$W = \mathrm{Span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}\right)$$

$$U = \mathrm{Span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}\right)$$

כאן $2 = \dim U < \dim W = 3$, $\dim(U \cap W) = 1 < 2 = \dim(U)$ ולכן $U \cap W \neq U$ וכן הסכום $U + W$ **אינו** סכום ישר.

4. טענה **לא נכונה**: אם $\dim U = 1$ אז $U + W = V$.

דוגמה נגדית:

$$U = \mathrm{Span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}\right)$$

$$W = \mathrm{Span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}\right)$$

כאן $U \cap W = \{0\} \neq U$, $\dim(U) = 1$, $\dim(U + W) = 3 < 4 = \dim(V)$ ולכן $U + W \neq V$.

<u>שאלה 6:</u> (5%)

תהי $A = \begin{pmatrix} 1+i & 2i \\ -i & 1+4i \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$. נסמן ב־ A_{kl}^{-1} את האיבר (kl) של A^{-1}.

$(A_{21}^{-1})^4$ שווה ל־

<u>פתרון:</u>

כידוע, לכל מטריצה הפיכה מתקיים $A^{-1} = \dfrac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)}$. לכן

$$(A^{-1})_{21} = \frac{i}{(1+i)(1+4i)-(2i)(-i)} = \frac{i}{-5+5i} = \frac{\operatorname{cis}(90^\circ)}{\sqrt{50}\operatorname{cis}(135^\circ)} = \frac{\operatorname{cis}(-45^\circ)}{\sqrt{50}}.$$

נעזר בנוסחת דמואבר:

$$\left((A^{-1})_{21}\right)^4 = \frac{\operatorname{cis}(4\cdot(-45)^\circ)}{50^2} = \frac{\operatorname{cis}(-180^\circ)}{50^2} = \frac{-1}{2500}.$$

התשובה הסופית: $\boxed{\dfrac{-1}{2500}}$

שאלה 7: (5%)

יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי על מרחב וקטורי נוצר סופית V מעל שדה F.
נסמן ב־ $I : V \to V$ את אופרטור הזהות על V: $I(v) = v$ לכל $v \in V$.

בדיוק שתי טענות מהטענות הבאות נכונות:

פתרון:

1. טענה **נכונה**: אם $\mathrm{Ker}(T^2) = \mathrm{Ker}(T)$ אז $\mathrm{Ker}(T^3) = \mathrm{Ker}(T^2)$.

הוכחה: לכל אופרטור מתקיים: $\mathrm{Ker}(T^2) \supseteq \mathrm{Ker}(T)$. ושיוון מתקיים רק כאשר $\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{0\}$.

באופן דומה, $\mathrm{Ker}(T^3) \supseteq \mathrm{Ker}(T^2)$. בכדי שלא יתקיים שיוון צריך להיות איבר v שונה מ־ 0 ב־ $\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T^2)$.

ידוע גם ש־ $\mathrm{Im}(T^2) \subseteq \mathrm{Im}(T)$.

לכן, לפי הנתון

$$\big(\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T^2)\big) \subseteq (\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T)) = \{0\}$$

ואז לא קיים $v \neq 0$ כנדרש, כלומר $\mathrm{Ker}(T^3) = \mathrm{Ker}(T^2)$.

2. טענה **לא נכונה**: אם $T^3 = T$, ו־ $T \neq 0$ אז $T^2 = I$.

דוגמה נגדית: יהי V ממימד 3 ו־ $B = \{u, v, w\}$ בסיס של V. ההעתקה שמוגדרת לפי $T(u) = u,\ T(v) = v,\ T(w) = 0$ מקיימת $T^n = T \neq 0$ לכל מספר טבעי (ובפרט ל־ $n = 3$). אך $T^2 = T \neq I$, ולכן על אף שתנאי הטענה מתקיימים, המסקנה של הטענה אינה מתקיימת.

3. טענה **לא נכונה**: אם $\dim(\mathrm{Ker}(T^2)) = 2\dim(\mathrm{Ker}(T))$ אז $\dim(\mathrm{Ker}(T^3)) = 3\dim(\mathrm{Ker}(T))$.

דוגמה נגדית: יהי V ממימד 3 ו־ $B = \{u, v, w\}$ בסיס של V. ההעתקה שמוגדרת לפי $T(u) = v,\ T(v) = 0,\ T(w) = w$. להעקתה זו מתקיים:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Span}(\{v\}) & \dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1 & \\ \mathrm{Ker}(T^n) = \mathrm{Span}(\{u, v\}) & \dim(\mathrm{Ker}(T^n)) = 2 & n \geq 2 \end{array}$$

תנאי הטענה מקיימים אך לא מסקנת הטענה.

4. טענה **נכונה**: אם $\dim V = 4$ ו־ $T^6 = I$ אז בהכרח T^{-1} הוא צירוף לינארי של $\{I, T, T^2, T^3\}$.

<u>הוכחה:</u> מכיון ש־ $T \circ T^5 = I$, האופרטור T הפיך.

נפעיל את משפט קיילי־המילטון על מטריצה מייצגת לפי בסיס סדור כלשהן B. נסמן ב־ A את המטריצה המייצגת, וב־

$$\Delta_T(\lambda) = \lambda^4 + \alpha_3\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

את הפולינום האופייני של T. מכיון ש־ T הפיך גם A הפיכה, ולכן האיבר החופשי, α_0 של הפולינום האופייני (הדטרמינטה של A) שונה מאפס.

לפי משפט קיילי־המילטון מתקיים

$$0 = \Delta_T(A) = A^4 + \alpha_3 A^3 + \alpha_2 A^2 + \alpha_1 A + \alpha_0 I$$

ולכן

$$A^{-1} = \frac{-1}{\alpha_0}\left(A^3 + \alpha_3 A^2 + \alpha_2 A + \alpha_1 I\right).$$

עקב התיאום החח"ע ועל בין אופרטורים ומטריצות מייצגות לפי בסיס קבוע,

$$T^{-1} = \frac{-1}{\alpha_0}\left(T^3 + \alpha_3 T^2 + \alpha_2 T + \alpha_1 I\right).$$

שאלה 8: (5%)

יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי על מרחב וקטורי ממשי ונוצר סופית V.
תהי $\{u, v, w\}$ קבוצה בלתי־תלויה לינארית ב־ V כך ש־

$$\begin{aligned} T(u+w) &= 2u+3w \\ T(-2u+3v-2w) &= -4u+24v-6w \end{aligned}$$

אזי: (שים לב: יש רק תשובה נכונה אחת.)

א. 8 הוא ערך עצמי של T.

ב. 5 הוא ערך עצמי של T.

ג. 24 הוא ערך עצמי של T.

ד. ל־ T יש לפחות שלושה ערכים עצמיים שונים.

ה. אם $\dim V = 3$ אז T לכסין.

ו. אם T לכסין אז $\dim V = 3$.

פתרון:

$$\begin{aligned} T(3v) &= T\big(\,(-2u+3v-2w)+2(u+w)\,\big) \\ &= T(-2u+3v-2w)+2T(u+w) \\ &= (-4u+24v-6w)+2(2u+3w) = 24v \end{aligned}$$

לכן התשובה הנכונה היא $\boxed{\text{8 הוא ערך עצמי של } T.}$

נפריך את תשובה ו': נגדיר אופרטור לינארי T על מרחב V ממימד 4 עם בסיס $\{u, v, w, z\}$ על ידי

$$T(u) = 2u, \quad T(v) = 8v, \quad T(w) = 3w, \quad T(z) = z.$$

קל לראות שהדוגמה מקיימת את המשוואות שנתונות בשאלה, ש־ T לכסין
אך שמימד המרחב V אינו 3.

נפריך את שאר התשובות: תהי $B = \{v, u, w\}$ בסיס של מרחב V.
נגדיר אופרטור לינארי T על מרחב V על ידי

$$T(v) = 8v, \quad T(u) = 2u+w, \quad T(w) = 2w.$$

המטריצה המייצגת לפי B היא $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. מכאן קל לראות שהע"ע של T הם 8 (בריבוי אלגברי וגיאומטרי 1) ו־ 2 בריבוי אלגברי 2 אך ריבוי גיאומטרי 1. אי לכך T זה אינו לכסין.
ל־ T הנ"ל יש רק שני ע"ע שונים שלא כוללים את 5 או 24,
והמימד של V הוא 3 אך T אינו לכסין.
דוגמא זו מקיימת את המשוואות הנתונות ולכן היא מפריכה את ארבעת התשובות הנותרות.

שאלה 9: (5%)

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$, ויהיו $u, w \in V$.

בדיוק שתי טענות מהטענות הבאות נכונות:

פתרון:

1. טענה **נכונה**: אם $\{u, w\}$ קבוצה אורתוגונלית, אז $\|u+w\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2$.

הוכחה: כידוע

$$(\star) \quad \|u+w\|^2 = \langle u+w, u+w\rangle = \|u\|^2 + \langle u, w\rangle + \langle w, u\rangle + \|w\|^2$$

כאשר $\{u, w\}$ קבוצה אורתוגונלית מתקיים $\langle u, w\rangle = 0 = \langle w, u\rangle$

ולכן מתקיים $\|u+w\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2$.

2. טענה **לא נכונה**: אם $\|u+w\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2$, אז $\{u, w\}$ קבוצה אורתוגונלית.

דוגמה נגדית: $u = (1, 0),\ w = (i, 0)$ ב־ $\mathbb{C}^2$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

$\langle u, w\rangle = -i$, ו־ $\langle w, u\rangle = i$.

לכן, נקבל לפי $(\star)$ שמתקיים לוקטורים אלו $\|u+w\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2$ אע"פ שהקבוצה $\{u, w\}$ אינה א"ג.

3. טענה **נכונה**: אם $\|u\| > \|w\|$, אז $\|u-w\| > 0$.

הוכחה: הנורמה של וקטור תמיד אי־שלילות, ושווה לאפס רק לוקטור האפס. על פי הנתון $u \neq w$ ולכן $u - w \neq 0$ ולכן $\|u-w\| > 0$.

4. טענה **לא נכונה**: אם $\|u-w\| > 0$, אז $\|u\| > \|w\|$.

דוגמה נגדית: $u = (1, 0),\ w = (2, 0)$ ב־ $\mathbb{C}^2$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

מתקיים התנאי $\|u-w\| = \|-u\| = 1 > 0$ אך $\|w\| = 2 > 1 = \|u\|$.